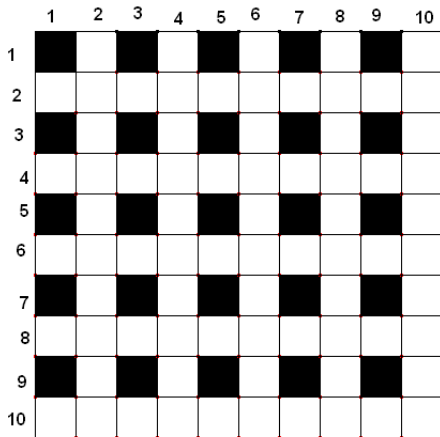


Curso 2010-11

Problema 118 *¿Podemos recubrir un tablero de tamaño 10×10 por 25 rectángulos de tamaño 4×1 ?*

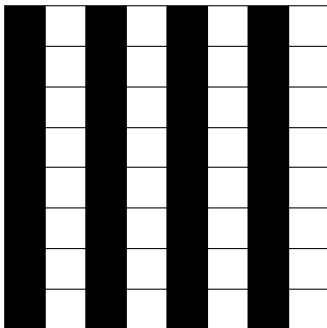
Problema 118 *¿Podemos recubrir un tablero de tamaño 10×10 por 25 rectángulos de tamaño 4×1 ?*



Hay 25 cuadros pintados de negro. Cada rectángulo de tamaño 4×1 recubre 0 o 2 cuadros negros, luego no se pueden recubrir los 25 cuadros negros.

Problema 119 *¿Podemos recubrir un tablero de tamaño 8×8 por 16 piezas, de las cuales una sea un cuadrado de tamaño 2×2 y las otras 15 tengan forma de L de área cuatro?*

Problema 119 *¿Podemos recubrir un tablero de tamaño 8×8 por 16 piezas, de las cuales una sea un cuadrado de tamaño 2×2 y las otras 15 tengan forma de L de área cuatro?*



Hay 32 cuadrados pintados de negro. El cuadrado de tamaño 2×2 recubrirá 2 cuadros negros.

Cada pieza L recubre 1 o 3 cuadros negros. Como hay 15 piezas L, el número de cuadros negros que recubren es impar y por tanto distinto de 30.

Problema 120 *Recubrimos un tablero de tamaño 8×8 por 21 piezas rectangulares de tamaño 3×1 , dejando un cuadrado vacío. ¿Puede estar ese cuadrado vacío en una esquina del tablero?*

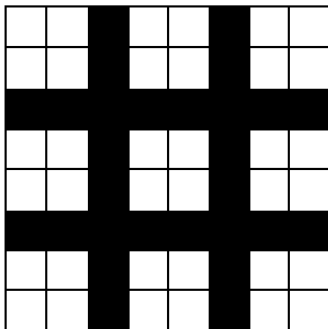
Problema 120 *Recubrimos un tablero de tamaño 8×8 por 21 piezas rectangulares de tamaño 3×1 , dejando un cuadrado vacío. ¿Puede estar ese cuadrado vacío en una esquina del tablero?*

Solución 1.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Si se quiere que la casilla superior izquierda quede vacía, al numerar las casillas en la forma de la figura vemos que hay 22 casillas numeradas con 2, 21 con 1 y 21 con 3. En cada pieza aparecen los tres números, luego la casilla vacía no puede ser la de la parte superior izquierda.

Solución 2. (Glenier Bello)



En la figura hay 28 casillas pintadas en negro.
Cada pieza de 3×1 recubre 1 o 3 celdas negras.
21 números impares suman impar.

Problema 121 *Probar que no existen enteros positivos x e y tales que los números $x^2 + y + 2$ y $y^2 + 4x$ sean ambos cuadrados perfectos.*

Problema 121 Probar que no existen enteros positivos x e y tales que los números $x^2 + y + 2$ y $y^2 + 4x$ sean ambos cuadrados perfectos.

(Reducción al absurdo.) Como $y > 0$, se tiene $x^2 + y + 2 > x^2$. Si fuese $x^2 + y + 2 = \square$, entonces

$$x^2 + y + 2 \geq (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \implies y \geq 2x - 1.$$

Como $x > 0$, se tiene $y^2 + 4x > y^2$. Si fuese $y^2 + 4x = \square$, entonces

$$y^2 + 4x \geq (y + 1)^2 = y^2 + 2y + 1 \implies 2y \leq 4x - 1.$$

Se sigue que $4x - 2 \leq 2y \leq 4x - 1$, luego $y = 2x - 1$. Como suponemos que $y^2 + 4x = \square = k^2$ con k entero, se tiene

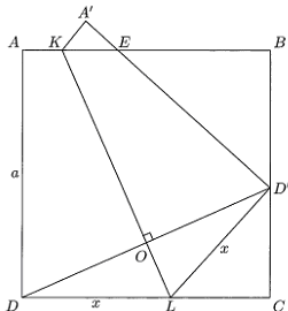
$$k^2 = (2x - 1)^2 + 4x = 4x^2 + 1.$$

Pero de aquí se sigue que $(2x)^2 < k^2 < (2x + 1)^2$, que es una contradicción.

Problema 122 Los vértices de una hoja cuadrada de papel son A , B , C y D en orden cíclico. Se hace un doblez rectilíneo en la hoja, de modo que el vértice D se lleva a coincidir con un punto D' del lado BC . Sea A' el punto que corresponde al vértice A tras el plegado, y E el punto de intersección de los segmentos AB y $A'D'$. Sea r el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle EBD'$. Probar que $r = A'E$.

Problema 122 Los vértices de una hoja cuadrada de papel son A , B , C y D en orden cíclico. Se hace un doblez rectilíneo en la hoja, de modo que el vértice D se lleva a coincidir con un punto D' del lado BC . Sea A' el punto que corresponde al vértice A tras el plegado, y E el punto de intersección de los segmentos AB y $A'D'$. Sea r el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle EBD'$. Probar que $r = A'E$.

Denotemos por a la longitud del lado del cuadrado.



La distancia de D' a la recta AD es a . Luego la distancia de D a ED' es también a . Se sigue que D es el centro de una de las circunferencias exinscritas al $\triangle EBD'$. Como las longitudes de las dos tangentes trazadas a una circunferencia por un mismo punto son iguales, el perímetro del $\triangle EBD'$ es $2 \cdot CD = 2a$. Finalmente, en el triángulo rectángulo EBD' se verifica

$$r = \frac{1}{2}(BE + BD' - ED'),$$

es decir,

$$r = \frac{1}{2}(BE + BD' + ED' - 2 \cdot ED') = \frac{1}{2}(2a - 2 \cdot ED') = a - ED' = A'E.$$

Problema 123 Sea $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Encuentra el polinomio Q cuyas raíces son las quintas potencias de las raíces de P .

Problema 123 Sea $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Encuentra el polinomio Q cuyas raíces son las quintas potencias de las raíces de P .

Solución 1.

Supongamos que a es una raíz de P . Entonces $-1 = a^3 - 3a$.

Elevando esta igualdad a la 5ª potencia y usándola sucesivamente en las cuentas, resulta

$$\begin{aligned} -1 &= a^5(a^2 - 3)^5 \\ &= a^5(a^{10} - 3^5 - 15a^2(a^2 - 3)(a^4 - 3a^2 + 9)) \\ &= a^5(a^{10} - 3^5 + 15(a^5 - 3(a^3 - 3a))) \\ &= a^5(a^{10} - 3^5 + 15(a^5 + 3)). \end{aligned}$$

Sea $a^5 = b$, entonces

$$b^3 + 15b^2 - 198b + 1 = 0,$$

luego $Q(x) = x^3 + 15x^2 - 198x + 1$.

Solución 2.

Sean a , b y c las raíces de P . Las *relaciones de Cardano* dan

$$a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = -3, \quad abc = -1.$$

Y el polinomio Q será

$$Q(x) = x^3 - (a^5 + b^5 + c^5)x^2 + (a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5)x - a^5b^5c^5.$$

El término independiente es $-a^5b^5c^5 = -(-1)^5 = 1$. Para los otros dos coeficientes iremos calculando los valores de las sucesivas expresiones $s_n = a^n + b^n + c^n$:

$$s_0 = 3, \quad s_1 = a + b + c = 0, \quad s_2 = s_1^2 - 2(ab + bc + ca) = 6;$$

aplicando las ecuaciones $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ se sigue, para $n \geq 3$, la recurrencia

$$s_n = 3s_{n-2} - s_{n-3},$$

luego

$$s_3 = -3, \quad s_4 = 18, \quad s_5 = -15;$$

así que el coeficiente de x^2 en Q es 15.

Para encontrar el coeficiente de x podemos usar la identidad

$$a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5 = \frac{1}{2}(s_5^2 - s_{10}).$$

Del cálculo sucesivo

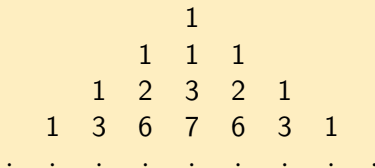
$$s_6 = 57, \quad s_7 = -63, \quad s_8 = 186, \quad s_{10} = 3s_8 - s_7 = 621,$$

resulta entonces

$$a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5 = \frac{1}{2}(s_5^2 - s_{10}) = -198.$$

Luego $Q(x) = x^3 + 15x^2 - 198x + 1$.

Problema 124 Consideremos el siguiente triángulo numérico, donde cada número es la suma de tres números de la fila previa: el número que tiene justo encima y los números que están inmediatamente a derecha e izquierda de ese número de encima. Si en una o más de estas posiciones no hay ningún número, se considera que hay un 0. Probar que, desde la tercera fila en adelante, cada fila contiene al menos un número par.



fila $n = 0$						1						
fila $n = 1$					1	1	1					
fila $n = 2$				1	2	3	2	1				
fila $n = 3$			1	3	6	7	6	3	1			
fila $n = 4$		1	4	10	16	19	16	10	4	1		
fila $n = 5$	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Llamemos U_n , A_n , B_n y C_n , respectivamente, a los números que ocupan los lugares primero, segundo, tercero y cuarto de la fila n -ésima del triángulo.

Se tiene

$$U_n = 0 + 0 + 1 = 1 \quad \text{para } n = (0,)1,2,\dots$$

Por inducción, ya que $A_1 = 0 + 1 + 0 = 1$ y $A_n = 0 + 1 + A_{n-1}$, resulta

$$A_n = n \quad \text{para } n = 1,2,\dots,$$

de manera que en las filas “pares” $n = 2k$, al menos el número $A_n = 2k$ es par.

Para $n = 1, 2, \dots$ se tiene

$$B_n := 1, 3, \mathbf{6, 10}, 15, 21, \mathbf{28, 36}, \dots$$

Por inducción, ya que $B_1 = 1 + 0 + 0 = 1$ y

$B_n = 1 + A_{n-1} + B_{n-1}$, resulta

$$B_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

de manera que en las filas “impares” de tipo “múltiplo de 4 más 3”
 $n = 4k + 3$, al menos el número $\mathbf{B_n = 2(k + 1)(4k + 3)}$ es par.

Para $n = 1, 2, \dots$ se tiene

$$C_n := \mathbf{0, 2}, 7, \mathbf{16, 30, 50}, 77, \mathbf{62, 106, 160}, 225, \dots$$

Por inducción, ya que $C_2 = 1 + 1 + 0 = 2$ y

$C_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$, resulta

$$C_n = \frac{(n-1)n(n+4)}{6}.$$

De manera que en las filas “impares” de tipo “múltiplo de 4 más 1” $n = 4k + 1$, al menos el número $C_n = \frac{4k(4k+1)(4k+5)}{6}$ es par (de los tres números $4k$, $4k + 1$, $4k + 5$, uno de ellos va a ser siempre múltiplo de 3, pues $4k + 5 \equiv 4k + 2 \pmod{3}$, y el número $2k$ es par).